07/04/2017

Μάθημα 11ο

ΑλγΙ.

Ασκήσεις Φυλλαδίου

Άσκηση 1.

$a \sim \beta$ ανν $\exists\ \gamma$ με $a = \gamma \beta \gamma^{-1}$

α) Ανακλαστική:

$a \sim a \quad : \quad a = \overset{1}{\gamma} a \overset{1}{\gamma}{}^{-1}$

β) Συμμετρική: αν $a \sim \beta \Rightarrow \beta \sim a$

$a \sim \beta \Leftrightarrow a = \gamma \beta \gamma^{-1} \Rightarrow \gamma^{-1} a \gamma = \gamma^{-1} \gamma \beta \gamma^{-1} \gamma \Leftrightarrow$

$\gamma^{-1} a \gamma = \beta \Leftrightarrow \gamma^{-1} a (\gamma^{-1})^{-1} = \beta$

γ) Μεταβατική: αν $a \sim \beta$ και $\beta \sim \gamma$ τότε $a \sim \gamma$

$$\left.\begin{array}{l} a \sim \beta \Leftrightarrow a = \delta \beta \delta^{-1} \\ \beta \sim \gamma \Leftrightarrow \beta = \varepsilon \gamma \varepsilon^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow a = \delta(\varepsilon \gamma \varepsilon^{-1})\delta^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = (\delta\varepsilon)\gamma(\delta\varepsilon)^{-1}$

Άσκηση 2

$\Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2 g\}$

$1 \sim 1 \sim a \quad , \quad a = \gamma 1 \gamma^{-1} = 1.$

$[1] = \{1\}$

$[f] = \{a f a^{-1} \mid a \in \Sigma_3\} = \{f, \overbrace{f^2 f (f^2)^{-1}}^{f}, \overbrace{g f}^{f^2 g} g^{-1} = f^2 g g = f^2,$

$fgf(fg)^{-1} = f\underbrace{gf}_{f^2 g} g f^{-1} = f f^2 g g f^2 = f^2,$

$f^2 g f (f^2 g)^{-1} = f^2 \underbrace{gf}_{f^2 g} g f^{-2} = f^2 f^2 g g f = f\}$

$[f] = \{f, f^2\}$

$[g] = \{g, fgf^{-1} = fgf^2 = ffg = f^2 g, f^2 g f^{-2} = f^2 g f = f^2 f^2 g = fg\}$

$\Sigma_3 = [1] \sqcup [f] \sqcup [g]$

Άσκηση 3

$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \Sigma_\nu$ και $\sigma \in \Sigma_\nu \Longrightarrow$

$\sigma (a_1, a_2, \dots, a_k) \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k))$

Όλα τα συζυγή ενός κύκλου είναι κ-κύκλοι

$\sigma (a_1, a_2, \dots, a_k) \cancel{\sigma^{-1}} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))\sigma$

Αν $t \in \{1, 2, \dots, \nu\} \Rightarrow \sigma(a_1, \dots, a_k)(t) = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))\sigma(t)$

Αν $t = a_i \Rightarrow (a_1, \dots, a_k)(t) = (a_1, \dots, a_k)(a_i) = a_{i+1}$

αν $i = k \Rightarrow a_1$ αν $i \neq k \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{i+1}$.

$\sigma(a_{i+1}) \rightarrow \sigma(a_1)$
$\rightarrow \sigma(a_{i+1})$

$(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_k))\sigma(a_i) = \rightarrow \sigma(a_1)$
$\rightarrow \sigma(a_{i+1})$

Αν $t \neq a_i \Rightarrow (a_1, \dots, a_k)(t) = t \Rightarrow \sigma(a_1, \dots, a_k)(t) = \sigma(t)$

$(\sigma(a_1), \dots \sigma(a_k))\sigma(t) = \sigma(t)$

$\tau \in \Sigma_\nu$. Βρες $\sigma \tau \sigma^{-1}$

$\tau = (a_1, \dots, a_k)(\beta_1, \dots, \beta_\ell) \dots (\delta_1, \dots, \delta_t)$ ξένοι κύκλοι

$\sigma \tau \sigma^{-1} = \sigma(a_1, \dots, a_k)\sigma^{-1}\sigma(\beta_1, \dots, \beta_\ell)\sigma^{-1}\sigma \dots \sigma^{-1}\sigma(\delta_1, \dots, \delta_t)\sigma^{-1}$

$\sigma \tau \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k))(\sigma(\beta_1) \dots \sigma(\beta_\ell)) \dots (\sigma(\delta_1) \dots \sigma(\delta_t))$

Άσκηση 4

$SL(2,\mathbb{R}) \trianglelefteq GL(2,\mathbb{R})$

$\forall A \in SL(2,\mathbb{R})$ και $\forall B \in GL(2,\mathbb{R})$

$BAB^{-1} \in SL(2,\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(BAB^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \det B \det A \det B^{-1} = 1$;;;

$\Leftrightarrow \det A \det B \det B^{-1} = 1 \Leftrightarrow \det A \det(BB^{-1}) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\det A}_{1} \underbrace{\det I_{n\times n}}_{1} = 1$ Ισχύει

Ομομορφισμοί

- $\varphi: O \to G$ ομομορφισμός ομάδων $\Leftrightarrow$
  $\varphi(a \circ_O b) = \varphi(a) \circ_G \varphi(b) \quad \forall a, b \in O$

- Αν $\varphi: O \to G$ ομομορφισμός ομάδων και φ: 1-1, τότε η φ καλείται μονομορφισμός.

- Αν $\varphi: O \to G$ ομομορφισμός ομάδων και φ: επί, τότε η φ καλείται επιμορφισμός.

- Αν ισχύουν και τα δύο ταυτόχρονα, τότε η φ καλείται ισομορφισμός και γράφουμε $O \underset{\varphi}{\cong} G$

Δηλαδή οι O και G "ταυτίζονται" όχι ως προς στοιχεία αλλά ως προς τις αλγεβρικές ιδιότητες:

Αν O κυκλική $\Longleftrightarrow$ G κυκλική

Αν O αβελιανή $\Longleftrightarrow$ G αβελιανή

Αν $|O| = m \Longleftrightarrow |G| = m$

Αν $o(a) = k \Leftrightarrow o(\varphi(a)) = k$

π.χ. G είναι κυκλική τάξης 10 : $G \cong \mathbb{Z}_{10}$

Παρατήρηση

Ένας ισομορφισμός ονομάζεται αυτομορφισμός αν $G = G$ $\varphi : G \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} G$

Ιδιότητες των ομομορφισμών

① Σύνθεση ομομορφισμών είναι ομομορφισμός

$G \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H$. Θέλουμε $\psi\varphi : G \to H$ ομομορφισμός.

$\psi\varphi(a \circ_G b) = \psi(\varphi(a \circ_G b)) = \psi(\varphi(a) \circ_G \varphi(b)) =$

$= \psi(\varphi(a)) \circ_H \psi(\varphi(b))$

② Σύνθεση μονομορφισμών είναι μονομορφισμών (από το (1) και τον απειροστικό)

③ Σύνθεση επιμορφισμών είναι επιμορφισμός

④ Σύνθεση ισομορφισμών είναι ισομορφισμός (από (1),(2),(3))

π.χ. Να εξετάσετε ομομορφισμούς από το $\mathbb{Z}$ στον εαυτό του

$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ τετριμμένος $\varphi(n) = 0$

$\varphi(1) = a \neq 0 \xrightarrow{\text{ομομ.}} \varphi(k) = ka$, φ : 1-1.

Πότε φ επιμορφισμός ;

Θα πρέπει να υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $\varphi(k) = 1$ $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(km) = m \cdot 1 = m$

Θα πρέπει $k = \pm 1$

Αν $\varphi(1) = a \Rightarrow \varphi(k) = \boxed{ka = 1} \Rightarrow a = \pm 1$.

πχ. $\varphi: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}$ ομομορφισμός, ταυτισμένος $\varphi([1]_5)=0$

όχι $\varphi([1]_5) = a \neq 0$

$\varphi[2] = \varphi[1] + \varphi[1] = 2a$

$\varphi[5] = 5a$

$\varphi[6] = \varphi[1] = a$

$6\varphi[1] = 6a$ } Θα πρέπει να είναι ίσα άρα $a=0$

πχ. $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ είναι επιμορφισμός

$1 \to [1]$ Η εικόνα του $5\mathbb{Z}$ είναι το $[0]$

$2 \to [2]$

$3 \to [3]$

$4 \to [4]$

$5 \to [0]$

$6 \to [1]$

$\vdots$

$a + 5k \Rightarrow [a]$

κλάσεις ισοδ.:

$0 + 5\mathbb{Z} \to [0]$

$1 + 5\mathbb{Z} \to [1]$

$2 + 5\mathbb{Z} \to [2]$

$3 + 5\mathbb{Z} \to [3]$

$4 + 5\mathbb{Z} \to [4]$

Εδώ έχουμε: $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}_5$

↓

είναι τα σύνολα

Πρόταση : Έστω $\varphi: D \to G$ ομομορφισμός ομάδων

1) $\varphi(1_D) = 1_G$

2) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

3) $O(\varphi(a)) \mid \varphi(a)$

Απόδειξη

① $\varphi(1_D) = \varphi(1_D \cdot 1_D) = \varphi(1_D) \cdot \varphi(1_D) \Rightarrow$
$\varphi(1_D)^{-1} \cdot \varphi(1_D) = \varphi(1_D)^{-1} \cdot \varphi(1_D)\varphi(1_D) \Rightarrow 1_G = \varphi(1_D)$

② $\varphi(a a^{-1}) = \varphi(1_D) = 1_G \Rightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1}) = 1_G \Rightarrow$
$\Rightarrow (\varphi(a))^{-1} \varphi(a) \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} 1_G$
$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

③ Έστω $O(a) = k \iff a^k = 1_D$ ← ελάχιστος
$\varphi(a^k) = \varphi(1_D) = 1_G \Rightarrow (\varphi(a))^k = 1_G \Rightarrow O(\varphi(a)) \mid k$

πχ Εξετάστε αν ορίζεται ομομορφισμός μη τετριμμένος
$\varphi: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_5$ ⓐ
$\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_{10}$ ⓑ
$\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_8$ ⓒ

ⓐ $\varphi([1]_3) = [k]_5 \neq [0]_5$
Από : $O(\varphi(a)) \mid \varphi(a)$:
$O(\varphi([1])_3) = O[k_5] = \frac{5}{(k,5)} = 5$, $O([1]_3) = 3$
Αδύνατο.

ⓑ $\varphi([1]_3) = [k]_{10}$, $O(\varphi[1]_3) = \frac{10}{(k,10)} \mid 3 = O([1]_3)$

$k=10$ αποκλείεται είναι ο τετριμμένος
$k=5 \to 2/3$ Αδύνατο
$k=2 \to 5/3$ Αδύνατο

$k = 1 \to 10/3$ αδυνατο.
Άρα ο μοναδικός είναι ο τετριμμένος.

(β) $\varphi([1]_6) = [k]_8$

$\frac{8}{(k,8)} \mid 6$

- $k = 8$; ΟΧΙ
- $k = 4$; $2/6$, άρα ΝΑΙ
- $k = 2$; $4/6$, άρα ΟΧΙ
- $k = 1$; $8 \nmid 6$, άρα ΟΧΙ

Υπάρχει μοναδική μη τετριμμένη

$\varphi[1]_6 = [4]_8$

$\varphi[2]_6 = [4]_8 + [4]_8 = [0]_8$

$\varphi[3]_6 = [0]_8 + [4]_8 = [4]_8$

$\varphi[4]_6 = [0]_8$

$\varphi[5]_6 = [4]_8$

$\varphi[0]_6 = [0]_8$

$[0]_8 = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\} = 2\mathbb{Z}_6$

Δεν είναι ισομορφισμός ούτε επιμορφισμός ούτε τετριμμένος
Είναι απλά ομομορφισμός.

Πρόταση Έστω $\varphi: O \to G$ ομομορφισμός
1) Αν $K \leq O$, τότε $\varphi(K) \leq G$
2) Αν $H \leq G$, τότε $\varphi^{-1}(H) \leq O$
3) Αν $H \trianglelefteq G$, τότε $\varphi^{-1}(H) \trianglelefteq O$

Απόδειξη
① $1 \in K \Rightarrow \varphi(1) = 1_G \in \varphi(K)$
αν $\varphi(\alpha), \varphi(\beta) \in \varphi(K) \Rightarrow \varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) \in \varphi(K)$
αλλά $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) = \varphi(\alpha\beta) \in \varphi(K)$
$\alpha\beta \in K$ μαζί $\alpha, \beta \in K$

Αν $\varphi(a) \in \varphi(K)$, πρέπει $\varphi(a)^{-1} \in \varphi(K)$

$a \in K \Rightarrow a^{-1} \in K \Rightarrow \varphi(a^{-1}) \in \varphi(K) \Rightarrow (\varphi(a))^{-1} \in \varphi(K)$

Άρα, $\varphi(O)$ εικόνα $\leq G$

② $\varphi^{-1}(H) = \{ a \in O$, ώστε $\varphi(a) \in H \}$

$1 \in \varphi^{-1}(H) \Rightarrow \underbrace{\varphi(1)}_{= 1_G} \in H \leq G$ ισχύει.

Αν $a, \beta \in \varphi^{-1}(H)$, πρέπει $a\beta \in \varphi^{-1}(H)$

ΔΜΔ $\varphi(a\beta) \in H \Leftrightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(\beta) \in H$

Αλλά $\varphi(a) \in H$ και $\varphi(\beta) \in H$, $H \leq G$

Άρα, $\varphi(a) \cdot \varphi(\beta) \in H$

③ $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$

Θέλουμε $\varphi^{-1}(H) \trianglelefteq O$. Γνωρίζουμε ότι $\varphi^{-1}(H) \leq O$

Πρέπει $a\varphi^{-1}(H)a^{-1} = \varphi^{-1}(H)$

Αρκεί $\forall \beta \in \varphi^{-1}(H)$ να έχουμε $a\beta a^{-1} \in \varphi^{-1}(H) \ \forall a \in O$

$a\beta a^{-1} \in \varphi^{-1}(H) \Leftrightarrow \varphi(a\beta a^{-1}) \in H$

$\Leftrightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(\beta) \cdot \varphi(a^{-1}) \in H \Leftrightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(\beta) \cdot (\varphi(a))^{-1} \in H$

Αλλά αυτό ισχύει γιατί $H \trianglelefteq G$

π.χ. $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ με $\varphi(a) = e^a > 0$

$\varphi(a+\beta) = e^{a+\beta} = e^a \cdot e^\beta = \varphi(a) \cdot \varphi(\beta)$

φ 1-1 και επί. Άρα $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+$

π.χ. $(\mathbb{Q}, +) \not\cong (\mathbb{Q}^+, \cdot)$ Δεν είναι ισόμορφες

Έστω $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+$ ισομορφισμός

$0 \mapsto 1.$

$\varphi \cong \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Q}$ με $\varphi(a) = 3$

$a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists \frac{a}{2} \in \mathbb{Q}$

$\varphi\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)=3 \Rightarrow \varphi\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=3$

Αν $\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=\beta \Rightarrow \beta^2=3$ και $\beta \in \mathbb{Q}$.